ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ – ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Χ.ΚΟΜΝΗΝΑΚΙΔΗΣ – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ M.Sc.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελίδα 150.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελίδα 87.

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελίδα 14.

Α4. (α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Σωστό (δ) Σωστό (ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1\,, A_f = R$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με

$f'(x) = x^2 - 5x + 6$

- $f'(x) = 0 => x^2 - 5x + 6 = 0 => x = 2$ ή $x = 3$
- $f'(x) > 0 => x^2 - 5x + 6 > 0 => x \in (-\infty\,, 2) \cup (3, +\infty)$
- $f'(x) < 0 => x^2 - 5x + 6 < 0 => x \in (2{,}3)$
- $f(2) = \frac{8}{3} - 10 + 12 - 1 = \frac{11}{3}$
- $f(3) = 9 - \frac{45}{2} + 18 - 1 = \frac{7}{2}$

x	-∞	2	3 +∞
$f'(x)$	+	-	+
Μονοτονία f	↗	↘	↗

τ.μ. το f(2)=11/3 τ.ε. το f(3)=7/2

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty\ ,2]$, $[3,\ +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,\ 3]$

Η f παρουσιάζει τ.μ. στην θέση x=2 , το f(2) = 11/3

Η f παρουσιάζει τ.ε. στην θέση x=3 , το f(3) = 7/2

B2. Είναι f(0) = - 1 και $f^{/}(0) = 6$

Το σημείο επαφής της εφαπτομένης με την C_f είναι από την εκφώνηση του ερωτήματος το Α(0,f(0)) = Α(0, -1)

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α(0, -1) είναι:

$y-f(0) = f^{/}(0)(x-0) \Leftrightarrow y-(-1) = 6x \Leftrightarrow y+1 = 6x \Leftrightarrow y = 6x - 1$

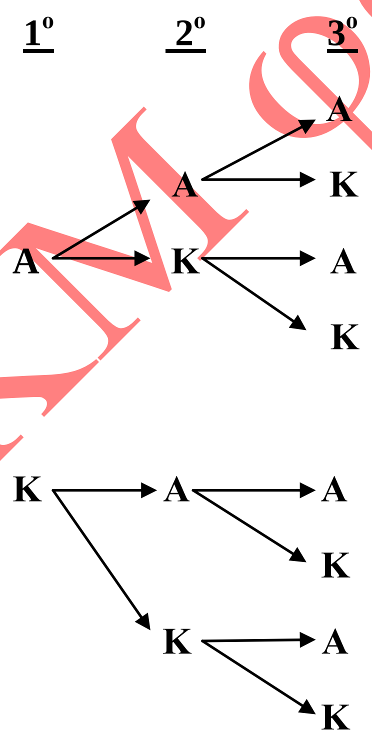
B3. $\lim_{x\to-1}\frac{f'(x)-12}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{x^2-5x-6}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{(x-6)(x+1)}{x+1} =$

$= \lim_{x\to-1}(x-6) = -1-6 = -7$

Αφού $x^2-5x-6=0$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma = 25+24=49$, $x_1 = 6$, $x_2 = -1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

Ω={ ΑΑΑ,ΑΑΚ,ΑΚΑ,ΑΚΚ,

ΚΑΑ,ΚΑΚ,ΚΚΑ,ΚΚΚ }

N(Ω) = 8

Γ2. Α = { ΚΑΑ,ΚΑΚ,ΚΚΑ,ΚΚΚ }

Β = { ΑΚΚ,ΚΑΚ,ΚΚΑ,ΚΚΚ }

Γ = { ΑΑΑ,ΑΑΚ,ΚΚΑ,ΚΚΚ }

Γ3. (α) Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα.

- $\Delta = A \cap B$ = {ΚΑΚ,ΚΚΑ,ΚΚΚ} , $P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$
- $E = A \cup B$ = {ΚΑΑ,ΚΑΚ,ΚΚΑ,ΑΚΚ,ΚΚΚ} , $P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$
- $Z = \Gamma - E$ = {ΑΑΑ,ΑΑΚ} , $P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

(β) Η = {δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β} = $P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

Θ = { πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α και Β} =

$= P[\,(A-B) \cup (B-A)\,] = P(A-B) + P(B-A) - P[\,(A-B) \cap (B-A)\,]$

$= P(A-B) + P(B-A) + 0 = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - 2\frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα ν_i
[8, …..) ή [α , α+c)		20
[….., …..) ή [α+c , α+2c)	14	15
[….., …..) ή [α+2c , α+3c)		10
[….., …..) ή [α+3c , α+4c)		ν_4
Σύνολο		

Με βάση τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι : α = 8 και $\frac{(\alpha+c)+(\alpha+2c)}{2} = 14 \Leftrightarrow$

$2\alpha+3c = 28 \Leftrightarrow 16+3c = 28 \Leftrightarrow 3c = 28 - 16 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4$

Δ2. Συμπληρώνουμε τώρα τον πίνακα μας:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα ν_i
[8, 12)	10	20
[12, 16)	14	15
[16, 20)	18	10
[20, 24)	22	ν_4
Σύνολο	-	

$$\bar{x} = \frac{(10)(20)+(14)(15)+(18)(10)+(22)\nu_4}{20+15+10+\nu_4} \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{(10)(20)+(14)(15)+(18)(10)+(22)\nu_4}{20+15+10+\nu_4} \Leftrightarrow$$

$200+210+180+22\nu_4 = (14)(45+\nu_4) \Leftrightarrow 590+22\nu_4 = 630+14\nu_4 \Leftrightarrow$

$8\nu_4 = 40 \Leftrightarrow \nu_4 = 5$

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα ν_i
[8, 12)	10	20
[12, 16)	14	15
[16, 20)	18	10
[20, 24)	22	5
Σύνολο	-	$\nu_{ολ} = 50$

Δ3. Λόγω ομοιομορφίας στις παρατηρήσεις των κλάσεων έχουμε:

Σε πλάτος [8 , 12) = 4 έχουμε 20 υπολογιστές

Σε πλάτος [9 , 12) = 3 έχουμε x ; υπολογιστές

4x = (3)(20) ⇔ 4x = 60 ⇔ x =15 υπολογιστές

Άρα συνολικά έχουμε **(x=15)**+15+10+5 = **45** υπολογιστές που χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά να τρέξουν το πρόγραμμα.

Δ4. $$s^2 = \frac{(10-14)^2 20+(14-14)^2 15+(18-14)^2 10+(22-14)^2 5}{50} =$$

$$= \frac{(16)(20)+0+(16)(10)+(64)(5)}{50} = \frac{320+160+320}{50} = \frac{800}{50} = 16$$

Άρα $s^2 = 16 \Leftrightarrow s = 4$

Είναι CV = $\frac{s}{|\bar{x}|}$ = $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ = 0,2857 ή 28,57 % > 10 % άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5. Οι νέες παρατηρήσεις είναι τώρα οι εξής:

$$y_1 = 0{,}8x_1 \quad , \quad y_2 = 0{,}8x_2 \quad , \ldots\ldots, \quad y_\nu = 0{,}8x_\nu$$

άρα $s_y = |0{,}8|\, s_x = (0{,}8)(4) = 3{,}2$ και $\bar{y} = 0{,}8\bar{x} = (0{,}8)(14) = 11{,}2$ οπότε

$CV' = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{3{,}2}{11{,}2} = 0{,}2857$ ή 28,57 % > 10 % άρα το δείγμα παραμένει ανομοιογενές.