ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ – ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Χ.ΚΟΜΝΗΝΑΚΙΔΗΣ – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ M.Sc.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελίδα 262.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελίδα 141

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελίδα 246.

Α4. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Λάθος (δ) Σωστό (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως ρητή με πρώτη παράγωγο

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}\ ,\ ((x^2+1)^2 > 0\ )$$

- $f'(x) = 0$ ⇔ 2x=0 ⇔ x=0 δεκτή ρίζα
- $f'(x) > 0$ ⇔ 2x > 0 ⇔ x > 0
- $f'(x) < 0$ ⇔ 2x < 0 ⇔ x < 0

x	-∞	0 +∞
$f'(x)$	-	+
Μονοτονία της f	↘	↗

ολικό ελάχιστο στο 0 το f(0)=0

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-∞ , 0]
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0 , +∞)
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το f(0)=0

Οπότε λόγω ολικού ελαχίστου στο 0 <u>για αρχή</u> έχουμε σίγουρα ότι f(x) $\geq f(0)$ ⇔ f(x) ≥ 0 , $\forall x \in R$, με την ισότητα να ισχύει <u>μόνο</u> στο x = 0. Οι ασύμπτωτες και τα όρια παρακάτω θα μας θα δώσουν πλήρως το τελικό σύνολο τιμών της f.

B2. Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο R ως ρητή με

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)(x^2+1-4x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{2(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(x^2+1)^3} \ , \ ((x^2+1)^3 > 0\ )$$

- $f''(x) = 0$ ⇔ $(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x\ ) = 0$ ⇔ x= $\sqrt{3}$ /3 ή x = - $\sqrt{3}$ /3
- $f''(x) > 0$ ⇔ $(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x\ ) > 0$ ⇔ x= $(-\sqrt{3}$ /3 , $\sqrt{3}$ /3)
- $f''(x) < 0$ ⇔$(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x\ ) < 0$ ⇔ x= $(-\infty$, $\sqrt{3}$ /3) ∪ ($\sqrt{3}$ /3 , +∞)

x	-∞	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$ +∞
f ' (x)	-	-	+	+
μονοτονία f	↘		↗	
f '' (x)	-	+	+	-
Κοίλα- Κυρτά f	κοίλη (∩)	κυρτή (∪)	κυρτή (∪)	κοίλη (∩)

- η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty$, $\sqrt{3}$ /3] , [$\sqrt{3}$ /3 , +∞)
- η f είναι κυρτή στο διάστημα =[$-\sqrt{3}$ /3 , $\sqrt{3}$ /3]
- η f παρουσιάζει σημείο καμπής στην θέση x = $-\sqrt{3}$ /3 το f($-\sqrt{3}$ /3) = 1 / 4
- η f παρουσιάζει σημείο καμπής στην θέση x = $\sqrt{3}$ /3 το f($\sqrt{3}$ /3) = 1 / 4

B3. Επειδή το A_f = (-∞, +∞) θα ψάξουμε για οριζόντιες ($y=y_o$) και πλάγιες ασύμπτωτες (y=λx+β) στο ±∞ γιατί κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν σύμφωνα με το πεδίο ορισμού της f. Έχουμε λοιπόν:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \in R$$

Άρα η οριζόντια ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο - ∞ οπότε δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο - ∞. Επίσης έχουμε:

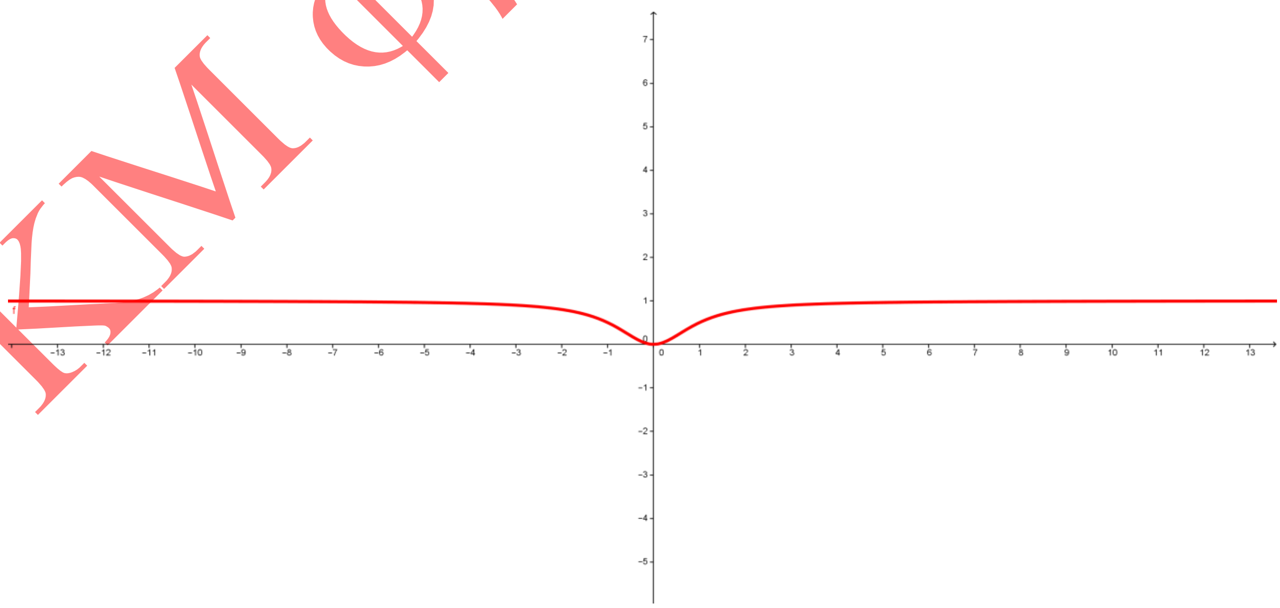
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \in R$$

Άρα η οριζόντια ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο + ∞ οπότε δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο + ∞.

Συνοψίζοντας έχουμε ότι η μοναδική ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f είναι η ευθεία y=1 και στο - ∞ και στο +∞ και τελικά το σύνολο τιμών της f είναι το [0, 1)

B4. Με βάση τώρα τον πίνακα μονοτονίας, τα κοίλα-κυρτά και την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f καθώς και τα παραπάνω όρια που υπολογίσαμε που μας δίνουν πληροφορίες για το σύνολο τιμών της f θα κάνουμε πολύ εύκολα την γραφική της παράσταση. Δίνουμε επιπλέον και μερικές χρήσιμες πληροφορίες για την f:

- για y=0 έχουμε ότι x=0 δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο O(0,0)
- για x=0 έχουμε y=0 δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο O(0,0)
- η C_f είναι άρτια διότι $\forall x \in R \Rightarrow -x \in R$ και $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = f(x)$ οπότε η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα yy'.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει προφανή ρίζα την x=0.

Από βασική ανίσωση του σχολικού βιβλίου έχουμε ότι $\ln x \le x-1, \forall x>0$ με το ίσον να ισχύει μόνο στο x=1. Οπότε, στην παραπάνω ανίσωση βάζουμε όπου $x \to e^x > 0$ και έχουμε: $\ln e^x \le e^x - 1 \Leftrightarrow x\ln e \le e^x - 1 \Leftrightarrow x \le e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \ge x+1, \forall x \in R$ με το ίσον να ισχύει μόνο στο x=0 ⇔ και τώρα βάζουμε όπου $x \to x^2$: $e^{x^2} \ge x^2+1, \forall x \in R$ με το ίσον να ισχύει μόνο στο x = 0. Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η x = 0.

<u>Β' Τρόπος</u>

Η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$ (1) έχει προφανή ρίζα την x=0.

Θέτουμε νέα συνάρτηση την $\kappa(x) = e^x - x$, $A_\kappa = R$ και τώρα η εξίσωση μας σύμφωνα με την κ(x) γράφεται : $\kappa(x^2)=1 \Leftrightarrow \kappa(x^2) = \kappa(0)$ (2) . Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση κ είναι 1-1.

Είναι $\kappa'(x) = e^x - 1$

$\kappa'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$\kappa'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

$\kappa'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0 $\qquad +\infty$
$\kappa'(x)$	-	+
Μονοτονία της κ	↘	↗

Οπότε έχουμε: $\kappa(x^2)=1 \Leftrightarrow \kappa(x^2) = \kappa(0)$ και επειδή το $x^2 \ge 0, \forall x \in R$ βρισκόμαστε δεξιά του x=0 στον παραπάνω πίνακα μονοτονίας όπου εκεί η συνάρτηση κ είναι γνήσια αύξουσα άρα και 1-1. Άρα : $\kappa(x^2)=1 \Leftrightarrow \kappa(x^2) = \kappa(0) \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ μοναδική διπλή ρίζα της αρχικής μας εξίσωσης.

Γ2. Θα βρούμε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την ιδιότητα

$$f^2(x) = (e^{x^2}-x^2-1)^2, \forall x \in R \quad (1)$$

είναι $f^2(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{x^2}-x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$ από (Γ1) έχουμε ότι x = 0 και

$f^2(x) \neq 0, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0, \forall x \neq 0$ και f συνεχής στο R

οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ *και* $(0, +\infty)$ δηλαδή

- $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 0)$
- $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$

Η σχέση (1) γράφεται: $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f^2(x) - (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$[f(x) - (e^{x^2} - x^2 - 1)][f(x) + (e^{x^2} - x^2 - 1)] \quad (2)$$

με $e^{x^2} - x^2 - 1 > 0$, $\forall x \neq 0$ από το (Γ1)

<u>1η περίπτωση: $x < 0$</u>

- **αν $f(x) > 0$** : η 2η παρένθεση στην (2) είναι > 0 οπότε υποχρεωτικά έχουμε ότι
  $[f(x) - (e^{x^2} - x^2 - 1)] = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x < 0$ (3)
- **αν $f(x) < 0$** : η 1η παρένθεση στην (2) είναι < 0 οπότε υποχρεωτικά έχουμε ότι
  $[f(x) + (e^{x^2} - x^2 - 1)] = 0 \Leftrightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$, $x < 0$ (4)

<u>2η περίπτωση: $x > 0$</u>

- **αν $f(x) > 0$** : η 2η παρένθεση στην (2) είναι > 0 οπότε υποχρεωτικά έχουμε ότι
  $[f(x) - (e^{x^2} - x^2 - 1)] = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x > 0$ (5)
- **αν $f(x) < 0$** : η 1η παρένθεση στην (2) είναι < 0 οπότε υποχρεωτικά έχουμε ότι
  $[f(x) + (e^{x^2} - x^2 - 1)] = 0 \Leftrightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$, $x > 0$ (6)

Συνοψίζοντας τις παραπάνω περιπτώσεις, έχουμε συνολικά 4 συναρτήσεις:

Συνδυασμός (3) – (5) : $f(x) = \begin{Bmatrix} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \leq 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x > 0 \end{Bmatrix} = e^{x^2} - x^2 - 1, \forall x \in R$

Συνδυασμός (3) – (6) : $f(x) = \begin{Bmatrix} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \leq 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x > 0 \end{Bmatrix}$

Συνδυασμός (4) – (5) : $f(x) = \begin{Bmatrix} -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x \leq 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x > 0 \end{Bmatrix}$

Συνδυασμός (4) – (6) : $f(x) = \begin{Bmatrix} -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x \leq 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x > 0 \end{Bmatrix} = -(e^{x^2} - x^2 - 1), \forall x \in R$

Γ3. Είναι f(x) = $e^{x^2} - x^2 - 1, \forall x \in R$

- $f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2} - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{Bmatrix} x = 0 \\ \acute{\eta} \\ e^{x^2} = 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ \acute{\eta} \\ e^{x^2} = e^0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ \acute{\eta} \\ x^2 = 0\text{ , αφού η } e^x \text{ είναι } 1-1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x=0$$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2} - 2x > 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (αφού $e^{x^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow$

  $e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^0 \Leftrightarrow x^2 > 0$ που ισχύει $\forall x \in R$ - {0})

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2} - 2x < 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - 1) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ (αφού $e^{x^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow$

  $e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^0 \Leftrightarrow x^2 > 0$ που ισχύει $\forall x \in R$ - {0})

οπότε

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞, 0]

η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0, +∞)

και έχει ολικό ελάχιστο στο x=0 , το f(0) = 0

f(x)≥ $f(0), \forall x \in R \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in R$

- $f''(x) = 2(e^{x^2} - 1) + 2x(2xe^{x^2}) = 2e^{x^2} - 2 + 4x^2e^{x^2} = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2} - 2 =$
  $= 4x^2e^{x^2} + 2(e^{x^2} - 1)$

προφανής ρίζα η x = 0 δηλαδή **$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.**

θα δείξουμε ότι είναι και μοναδική ρίζα της f''

$1^η$ περίπτωση: x > 0

- Για κάθε x > 0: $4x^2e^{x2} > 0$
- Για κάθε x > 0 ⇔ $x^2 > 0$ ⇔ $e^{x2} > e^0$ ⇔ $e^{x2} > 1$ ⇔ $e^{x2}-1 > 0$
  άρα **$f^{//}(x) > 0$, για κάθε x > 0**

$2^η$ περίπτωση: x < 0

Από βασική ανίσωση του σχολικού βιβλίου έχουμε ότι $\ln x \leq x-1, \forall x>0$ (με το ίσον να ισχύει μόνο στο x=1). Οπότε, στην παραπάνω ανίσωση βάζουμε όπου $x \to e^x > 0$ και έχουμε: $\ln e^x \leq e^x - 1$ ⇔ $x\ln e \leq e^x - 1$ ⇔ $x \leq e^x - 1$ ⇔ $e^x \geq x+1, \forall x \in R$ (με το ίσον να ισχύει μόνο στο x=0) ⇔ και τώρα βάζουμε όπου $x \to x^2$: $e^{x2} \geq x^2+1, \forall x \in R$ ⇔

$4x^2e^{x2} \geq 4x^2(x^2+1), \forall x \in R$ (με το ίσον να ισχύει μόνο στο x = 0).

Άρα έχουμε **$4x^2e^{x^2} > 4x^2(x^2+1)$ (1)** $, \forall x \in R-\{0\}$ άρα και **για x < 0** (και x > 0)

και

επίσης έχουμε ήδη $e^{x2} \geq x^2+1, \forall x \in R$ ⇔ $e^{x2}-1 \geq x^2$ ⇔ $2(e^{x2}-1) \geq 2x^2$ (με το ίσον να ισχύει μόνο στο 0) , οπότε **$2(e^{x2}-1) > 2x^2$ (2), για κάθε x < 0** (και x > 0).

Από (1)+(2) => **$4x^2e^{x^2}+2(e^{x2}-1) > 4x^2(x^2+1)+2x^2$ ⇔**

$4x^2e^{x^2}+2(e^{x2}-1) > 4x^4+6x^2 > 0$, για κάθε x < 0 (και x > 0)

Άρα $f^{//}(x) > 0$, για κάθε x < 0

Άρα τελικώς έχουμε ότι $f^{//}(x) \geq 0$, για κάθε $x \in R$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο x=0 οπότε η **f είναι κυρτή στο R** και δεν έχει σημεία καμπής. (η $2^η$ περίπτωση με x<0 μπορεί να αποτελέσει και ως λύση όλου του ερωτήματος Γ3 διότι ότι δείξαμε ισχύει και για x > 0)

Β΄ τρόπος

$f^{//}(x) = 2(e^{x2}-1)+2x(2xe^{x2}) = 2e^{x2}-2+4x^2e^{x2} = 4x^2e^{x2}+2e^{x2}-2$

Θέτουμε νέα συνάρτηση $g(x) = 4x^2e^{x2}+2e^{x2}$, θ.δ.ο. $g(x) \geq 2, \forall x \in R$

Είναι $g'(x) = 4xe^{x^2}(2x^2+3)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, $g'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$, g γνησίως αύξουσα για κάθε x > 0 και

$g'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$, g γνησίως φθίνουσα για κάθε x < 0 , οπότε η g παρουσιάζει ολικό

ελάχιστο στο x = 0 , το g(0)=2 δηλαδή $g(x) \geq g(0)$, $\forall x \in R \Leftrightarrow g(x) \geq 2$, $\forall x \in R$ =>

$f''(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο x=0, οπότε η f είναι κυρτή σε όλο το R.

Γ4. Θα λύσουμε την εξίσωση $f(|ημx|+3) - f(|ημx|) = f(x+3) - f(x)$ (1) , για κάθε $x \geq 0$

Θεωρούμε την νέα συνάρτηση $g(x) = f(x+3) - f(x)$, για κάθε $x \geq 0$ και η (1) γράφεται μέσω της g : $g(|ημx|) = g(x)$ (2), για κάθε $x \geq 0$.

Είναι $g'(x)=f'(x+3) - f'(x)$

Όμως x+3 > x , για κάθε $x \geq 0$ και f κυρτή από (Γ3) => f' γνησίως αύξουσα =>

$x+3 > x \Rightarrow f'(x+3) > f'(x) \Rightarrow g'(x) > 0$ => g γνησίως αύξουσα για κάθε $x \geq 0$ =>

g είναι 1-1, για κάθε $x \geq 0$ => η (2) γίνεται $|ημx| = x = |x|$ για κάθε $x \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο x = 0 . άρα η ζητούμενη εξίσωση έχει μοναδική λύση την x = 0.

(η βασική ανίσωση σχολικού είναι $|ημx| \geq |x|, \forall x \in R$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο x = 0).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε : $\int_0^{\pi}[f(x) + f''(x)]ημx dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)ημx dx + \int_0^{\pi}(f'(x))'\, ημx dx = \pi \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi} f(x)ημx dx + [f'(x)ημx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)συνx dx = \pi \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi} f(x)ημx dx - \int_0^{\pi} f'(x)συνx dx = \pi \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi} f(x)ημx dx - [f(x)συνx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)ημx dx = \pi \Leftrightarrow - [f(x)συνx]_0^{\pi} = \pi \Leftrightarrow$

$- f(\pi)συν\pi + f(0)συν0 = \pi \Leftrightarrow f(0) + f(\pi) = \pi$ (1)

Επίσης έχουμε : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{ημx} = 1$, θέτουμε $h(x) = \frac{f(x)}{ημx}$ οπότε $\lim_{x\to 0} h(x) = 1 > 0$ =>

η h(x) είναι θετική κοντά στην περιοχή του $x_o = 0 \Rightarrow h(x) > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{ημx} > 0$ κοντά στο 0

=> $f(x)\eta\mu x > 0$ κοντά στο 0 => $f(x) \neq 0$ και $\eta\mu x \neq 0$ κοντά στο 0. Άρα $f(x)=h(x)\eta\mu x$.

Επειδή υπάρχει το όριο του 2ου μέλους => υπάρχει και το όριο της f και μάλιστα έχουμε

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x)\eta\mu x = \lim_{x\to 0} h(x) \lim_{x\to 0} \eta\mu x = 1\eta\mu 0 = 0 = f(0) \Leftrightarrow$

$f(0)=0$ (2) αφού η f είναι συνεχής στο R άρα και στο 0.

Από τις σχέσεις (1) , (2) έχουμε ότι $f(\pi) = \pi$.

Συνεχίζοντας στο ίδιο ερώτημα έχουμε από τα δεδομένα ότι:

$e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x \Leftrightarrow$ έχουμε παραγωγίσιμα μέλη $\Leftrightarrow$

$f'(x)e^{f(x)} + 1 = f'(f(x))f'(x) + e^x \Leftrightarrow$ για $x \to 0 \Leftrightarrow$

$f'(0)e^{f(0)} + 1 = f'(f(0))f'(0) + e^0 \Leftrightarrow f'(0) + 1 = f'(0)f'(0) + 1 \Leftrightarrow$

$f'(0) = f'(0)f'(0) \Leftrightarrow f'(0)(f'(0) - 1) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$ ή $f'(0) = 1$.

Όμως $1 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = DLH = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{f'(0)}{1} = f'(0) \Leftrightarrow f'(0)=1$ τελικώς.

Δ2. (α) Έστω ότι η συνάρτηση f έχει ακρότατο στην θέση x_1 και επειδή είναι και παραγωγίσιμη στο R άρα και στο x_1 => από το Θ.Fermat => θα ισχύει ότι $f'(x_1) = 0$.

Είναι $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x \Leftrightarrow$ έχουμε παραγωγίσιμα μέλη $\Leftrightarrow$

$f'(x)e^{f(x)} + 1 = f'(f(x))f'(x) + e^x \Leftrightarrow$ για $x \to x_1 \Leftrightarrow$

$f'(x_1)e^{f(x_1)} + 1 = f'(f(x_1))f'(x_1) + e^{x_1} \Leftrightarrow 1 = e^{x_1} \Leftrightarrow e^0 = e^{x_1} \Leftrightarrow x_1 = 0$

άρα $f'(0) = 0$ που είναι αδύνατον αφού έχουμε δείξει ότι $f'(0) = 1$.

Άρα η f δεν έχει ακρότατα στο R.

(β) Από το (α) ερώτημα δείξαμε ότι η f δεν έχει ακρότατα => οπότε $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in R$ και f' συνεχής ως 2 φορές παραγωγίσιμη στο R => η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και $f'(0) = 1 > 0$ => $f'(x) > 0$, $\forall x \in R$ => f γνησίως αύξουσα στο R.

Δ3. $\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| = \frac{|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{2}{|f(x)|} \Leftrightarrow$

$\frac{-2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$ (1)

Όμως $A_f = R = (-\infty, +\infty)$ και f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο R (από Δ2β) =>

$B_f = (\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (-\infty,\ +\infty)$ αφού f(R)=R από εκφώνηση.

Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ οπότε από την (1) με το Κ.Π. => $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$

Δ4. Θα δείξουμε ότι $0 < \int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$ (1)

Θεωρούμε F αρχική της f στο R ⇔ $F'(x) = f(x)$.

$(F(\ln x))' = F'(\ln x)(\ln x)' = F'(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right) = f(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)$ (2)

Άρα η (1) μέσω της (2) γίνεται $0 < \int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2 \Leftrightarrow$

$0 < [F(\ln x)]_1^{e^\pi} < \pi^2 \Leftrightarrow 0 < F(\ln e^\pi) - F(\ln 1) < \pi^2 \Leftrightarrow$

$0 < F(\pi) - F(0) < \pi^2 \Leftrightarrow 0 < \frac{F(\pi)-F(0)}{\pi-0} < \pi$ (3)

F συνεχής στο [0,π] , F παραγωγίσιμη στο (0,π) =>

από το Θ.Μ.Τ => υπάρχει $\xi \in (0,\pi)$: $F'(\xi) = \frac{F(\pi)-F(0)}{\pi-0}$ (4)

Η (3) μέσω της (4) => $0 < F'(\xi) < \pi$ => $0 < f(\xi) < \pi$ => $f(0) < f(\xi) < f(\pi)$ =>

η f είναι και γνησίως αύξουσα => $0 < \xi < \pi$, που ισχύει.

<u>Β΄ τρόπος (με αλλαγή μεταβλητής)</u>

Θέτουμε στο ολοκλήρωμα $\ln x = u$, $\frac{1}{x}dx = du$, για x=1 => u = 0 , για $x = e^\pi$ => $u = \pi$

και έχουμε: $\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_0^\pi f(u)du = F\ \alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\eta\varsigma\ f = [F(x)]_0^\pi = F(\pi) - F(0)$

άρα έχουμε $0 < F(\pi) - F(0) < \pi^2 \Leftrightarrow 0 < \frac{F(\pi)-F(0)}{\pi-0} < \pi$ (3)

F συνεχής στο $[0,\pi]$, F παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ =>

από το Θ.Μ.Τ => υπάρχει $\xi \in (0,\pi)$: $F'(\xi) = \frac{F(\pi)-F(0)}{\pi-0}$ (4)

Η (3) μέσω της (4) => $0 < F'(\xi) < \pi$ => $0 < f(\xi) < \pi$ => $f(0) < f(\xi) < f(\pi)$ =>

η f είναι και γνησίως αύξουσα => $0 < \xi < \pi$, που ισχύει.